На правах рукописи

Казза Ахмад Мохаммад

Приведение задачи Дирихле и её обобщений для эллиптических уравнений к граничным задачам для голоморфных функций

Специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико – математических наук

Научный руководитель –
доктор физико – математических наук
профессор Л.И. Чибрикова

Казань – 2000

Работы выполнена на кафедре дифференциальных уравнений механико – математического факультета Казанского государственного университета.

Научный руководитель: доктор физико–математических наук, профессор Чибрикова Л.И.

Официальные оппоненты: доктор физико – математических наук, профессор Хайруллин Р.С.
кандидат физико – математических наук, доцент Мерлин А.В.

Ведущая организация: Самарский государственный университет.

Защита состоится 9 февраля 2000г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета К 053.29.27 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 18.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Казанского государственного университета.

Автореферат разослан « 8 » января 2000 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физ. – мат. наук,
профессор Плещинский Н.Б.

07134б9-1

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Предлагаемая диссертация посвящена разработке конструктивных методов решения задачи Дирихле (задача Д) и ее обобщения с производными и интегралами в граничном условии (задача А) для линейных уравнений в частных производных второго порядка эллиптического типа

$$E(u) = \Delta u + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = 0, \tag{1}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{2}$$

с вещественно-аналитическими коэффициентами a, b, c в случае плоских областей, ограниченных алгебраическими кривыми.

При аналитических коэффициентах (вещественных или комплексных) построение решений эллиптических уравнений и изучение их свойств проводится и проводилось чаще всего методами комплексного анализа. По этой теме опубликовано очень много работ. Однако все известные результаты, послужившие основой для данной диссертации, имеются в монографии И.Н. Векуа («Новые методы решения эллиптических уравнений». – М. –Л.: ОГИЗ Гостехиздат, 1948. –296с). Он изучил регулярные в конечносвязных областях T решения u(x,y) уравнения (1) методом продолжения на комплексные переменные x и y, что достигается переходом к новым комплексным переменны

$$z = x + iy \quad , \quad \zeta = x - iy \tag{3}$$

($\zeta = \bar{z}$ только при вещественных x, y). Вместо (0.1) получается комплексное в общем случае уравнение

$$F(U) \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \zeta} + A(z,\zeta)\frac{\partial U}{\partial z} + B(z,\zeta)\frac{\partial U}{\partial \zeta} + C(z,\zeta)U(z,\zeta) = 0 \tag{4}$$

с новой неизвестной функцией

$$U(z,\zeta) = u\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right), \tag{5}$$

и новыми коэффициентами A, B, C, аналитическими в некоторой области $(\Omega \times \overline{\Omega})$ пространства двух комплексных переменных z, ζ. При этом в (4) под $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \zeta}$ надо понимать операторы комплексного дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{6}$$

Для любого регулярного решения, как вещественного, так и комплексного, было получено представление в виде линейного интегрального оператора, содержащего произвольные голоморфные в T функции одного комплексного переменного, при этом число этих функций определяется порядком связности области $T \subset \Omega$. И.Н. Векуа показал (гл.3), что его интегральные представления удобны при решении граничных задач Д и А в случае конечносвязных областей T с ляпуновскими границами ∂T. регулярные решения этих граничных задач он записывал в виде своих формул, входящие в них неизвестные голоморфные функции записывал в виде некоторых интегралов с неизвестными плотностями, для определения которых на основе граничного условия получал сингулярное интегральное уравнение или же уравнении Фредгольма.

В начале 90-х годов были защищены две кандидатские диссертации, выполненные З. Нутом (1991г.) и А. Аль-Джауром (1992г.) на кафедре дифференциальных уравнений Казанского университета под руководством профессора Л.И. Чибриковой. В этих диссертациях речь шла о решении граничных задач Д и А в случае областей T, ограниченных алгебраическими кривыми, путем переноса этих задач на риманову поверхность симметрии границы ∂T. В первой из диссертаций задачи Д и А решались для вещественного ДУ (1), во второй – для системы таких эллиптических уравнений. Настоящая диссертация непосредственно связана с работой З. Нутом. В ней задачи Д и А рассматривались для области T, когда ее границей служит либо заданная алгебраическая кривая

$$L: p(x, y) = 0, \tag{7}$$

либо части кривой L и её осей симметрии. Обе задачи Д и А решаются фактически одним приемом: исходные граничные условия задач для u(x,y) на основании (5) переносились на функцию $U(z,\zeta)$ аналитическую на римановой поверхности симметрии кривой L

$$\Re_z : P(z,\zeta) \equiv p\left[\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right] = 0, \tag{8}$$

точнее аналитическую в области $T_z \subset \Re_z$ с границей $L_z : \zeta = \bar{z}$, проекцией которой на плоскость z является ∂T, и в случае задачи Д для $U(z,\zeta)$ в T_z получалось задача Шварца, а в случае задачи А – опять задача А; по найденной $U(z,\zeta)$ неизвестная голоморфная в T функция в представлении И.Н. Векуа получалась обращением оператора Вольтерра в T.

теоретическое и прикладное значение граничных задач для эллиптических уравнений (1) во многих разделах науки и техники хорошо известно, поэтому как совершенствование имеющихся, так и разработка новых методов их решения еще долгое время будет актуальной темой для исследований. Почти нет эффективных методов решения граничных задач, применимых хотя бы в отдельных частных случаях. Методы И.Н. Векуа и З. Нута почти ничего в этом направлении не дают из-за сложности применяемого аппарат (с. и. у., краевые задачи на римановых поверхностях).

Цель работы. В диссертации разрабатывается новый метод решения тех же граничных задач Д и А для уравнения (1) с аналитическими коэффициентами. В случае односвязных областей с алгебраическими границами удалось выделить класс звездных областей, для которых этот метод может быть эффективным.

Общая методика исследования. Задачи Д и А в случае односвязных областей T с алгебраическими границами (как в работе З. Нута) на риманову поверхность не переносятся. Их решения отыскиваются в виде интегральных формул И.Н. Векуа содержащих неизвестную голоморфную в T функцию $\varphi(z)$, но для её определения используется идея Л.И. Чибриковой, основанная на условии симметрии

$$U(\bar{\zeta}, \bar{z}) = \overline{U(z, \zeta)}, \tag{9}$$

вытекающем из формулы (5) в силу вещественности функции u(x,y). С помощью соотношения (9) обе задачи приводятся в конечном счете к обращению оператора Вольтерра на ∂T и решению задач Д и А в той же области Т, но уже для голоморфной функции $\varphi(z)$. Метод может быть эффективным для звездных областей.

Научная новизна. Новой является вся схема метода решения обеих задач, основанная на соотношении (9) и, в частности, вывод дополнительных условии на ∂T, обеспечивающих эквивалентность исходных задач Д и А для эллиптического уравнения (1) и одноименных задач для голоморфных в Т функций.

Теоретическая и практическая ценность. Работа в целом носит теоретический характер, являясь заметным вкладом в теорию граничных задач для уравнений эллиптического типа в случае плоских областей с алгебраическими границами. Получение в ней условия эквивалентности задач Д и А для эллиптического уравнения (1) и для голоморфных функций одного переменного могут представлять интерес и для прикладников.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на семинарах кафедры дифференциальных уравнений Казанского университета (КГУ) и на итоговый конференции КГУ 1999 года.

Публикации. Основные результаты диссертации представлены к депонированию в двух статьях (39 и 10 страниц). Первая выполнена в со авторстве с научным руководителем, которому принадлежат постановка задачи и общие указания о подходе к решению.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 79 страницах (word, a4) и состоит из введения, семи параграфов и списка литературы из 43 наименований.

Содержания работы

Введения содержит краткий литературный обзор, обоснования темы диссертации и краткое содержание всей работы.

§1 представляет собой реферат по главам 1 и 3 монографии [1] И.Н. Векуа. Основное внимание уделено описанию общих представлений регулярных решений уравнения (1) и решению задач Д и А для этого уравнения.

§2 также является вспомогательным. Здесь очень коротка описаны основные характеристики алгебраических кривых (порядок, род, типы особых точек), связанных с ними римановых поверхностей симметрии и основы применения этих поверхностей при решении краевых задач типа Гильберта для голоморфных функций одного переменного. При описании основных классов симметричных римановых поверхностей использован пример – поверхность симметрии овалов Кассиних.

В §§3 –7 изложен оригинальный материал диссертации.

В §3 изложена схема решения задачи Д для односвязной звездной области $T \subset \Omega$, ограниченной алгебраической кривой L, заданной алгебраическим уравнением (7); её род $\rho \geq 0$ и состоит она из одного овала.

Задача Д сформулирована следующим образом:

найти регулярные в области $T \subset \Omega$ решения u(x, y) вещественного уравнения (1), непрерывно продолжимое на ∂T всюду, исключая разве что конечное число точек $t_1, t_2, \dots, t_l$, и удовлетворяющее граничному условию

$$u^+(t) = f(t)\ ,\ t \in \partial T \setminus \{t_1, t_2, \dots, t_l\}, \tag{10}$$

где f – заданная действительная функция, удовлетворяющая условию Гельдера во всех точках $t \in \partial T \setminus \{t_1, t_2, \dots, t_l\}$, а в точках $t_1, t_2, \dots, t_l$ могут быть точки разрыва первого рода.

Здесь Ω есть так называемая основная область уравнения (1). Это – область аналитичности комплексного уравнения F(U)=0 (4), полученного из уравнения (1) переходом к комплексным переменным z и ζ (3). Функция $U=U(z,\zeta)$ (5) является C – аналитической по z, ζ в цилиндрической области $(\Omega \times \overline{\Omega})$ и называется обычно аналитическим продолжением u(x,y) на комплексные переменные z, ζ. Используя функцию Римана $G(t,\tau;z,\zeta)$ уравнения $F(U)=0$ (4), И.Н. Векуа показал, что при вещественном уравнении (1) все C – аналитические в $(\Omega\times\overline{\Omega})$ решения уравнения (4) имеют вид

$$U(z,\zeta)=G(z,\overline{z}_0;z,\zeta)\varphi(z)-\int_{z_0}^{z}\varphi(t)H(t,\overline{z}_0;z,\zeta)dt=\Theta[\varphi(z)], \tag{11}$$

$$H(t,\overline{z}_0;z,\zeta)=\frac{\partial}{\partial t}G(t,\overline{z}_0;z,\zeta)-B(t,\overline{z}_0)G(t,\overline{z}_0;z,\zeta) \tag{12}$$

где $\varphi(z)$ – произвольная функция, голоморфная в Ω, а все регулярные в Ω решения уравнения (1) определяются формулой

$$u(x,y)=\mathrm{Re}U_0(z,\overline{z}). \tag{13}$$

Решение задачи Д будет определяться формулами (11)-(13), если в них функцию $\varphi(z)$ определить так, чтобы на ∂T выполнялось заданное условие (10).

Здесь в диссертации предлагается метод определения функции $\varphi(z)$, голоморфной в $T\subset\Omega$, отличный от методов И.Н. Векуа и З.М. Нута. Совершив в уравнении L (7) переход к комплексным переменным z, ζ (3), получаем уравнение римановой поверхности $\Re_z$ (8), на которой образом $L=\partial T$ будет линия

$$L_z: z=\xi, \zeta=\overline{\xi} \quad (\xi\in L), \tag{14}$$

являющаяся линией симметрии $\Re_z$ с законом симметрии $(z,\zeta)\leftrightarrow(\overline{\zeta},\overline{z})$. Проекцией $L=\partial T$ на плоскость z является линия $L=\partial T$. Из граничного условия (10) на основании (5) получается на ∂T граничное условие

$$\mathrm{Re}U(z,\zeta)\big|_{L_z}=\mathrm{Re}U(\xi,\overline{\xi})=f(\xi),\ \xi\in\partial T. \tag{15}$$

Л.И. Чибрикова обратила наше внимание на то, что на основании соотношения (5), связывающего между собой любое регулярное в T решение u(x,y) уравнения (1) и C– аналитическое решение $U(z,\zeta)$ в $(T\times\overline{T})$ уравнении (4) в силу вещественности u(x,y) имеет место условие симметрии (9); поэтому при решении задачи Д для уравнения (1), эквивалентной задаче Шварца (15), следует попытаться построить её решение методом симметрии по аналогии с этим методом в случае задачи Д для гармонических функций и задачи Шварца для функций, голоморфных в круге функций. При осуществлении такого метода получилась следующая схема решения задачи Д.

Отыскиваем решение задачи Шварца (15) в виде формул И.Н. Векуа (11)-(13), в которых определению подлежит неизвестная голоморфная функция $\varphi(z)$. Для её определения вводим вспомогательную кусочноголоморфную на $\Re_z$ функцию

$$U_{\bullet}(z,\zeta)=\begin{cases}U(z,\zeta),(z,\zeta)\in(T\times\overline{T}),\\ \overline{U(\overline{\zeta},\overline{z})},(z,\zeta)\in(\overline{T}\times T).\end{cases} \tag{17}$$

На основании этих равенств $U_{\bullet}(z,\zeta)$ удовлетворяет условию симметрии (9), а ее предельные значения на линии симметрии ∂T оказываются связанными соотношением

$$U^{+}(\xi,\overline{\xi})+U^{-}(\xi,\overline{\xi})=2f(\xi),\ \xi\in\partial T. \tag{18}$$

Если при вычислении левой части (18) воспользоваться при представлении $U(z,\zeta)$ в (17) формулой И.Н. Векуа, то эту левую часть можно представить в виде одного интегрального оператора $\Theta[\mathrm{Re}\varphi(\xi)]$, если наложить на T дополнительное требование звездности. При этом условии (18) примет вид

$$\Theta[\mathrm{Re}\varphi(\xi)]=f(\xi),\xi\in\partial T. \tag{19}$$

Отсюда обращением оператора Вольтерра второго рода получается краевое условие задачи Шварца

$$\mathrm{Re}\varphi(\xi)=\Theta^{-1}[f(\xi)],\ \xi\in\partial T. \tag{20}$$

Если эта задача разрешима, то подставив ее решение в формулы (11)-(13), получим соответствующее решение задачи Д для уравнения (1).

При условии звездности T из соотношения (19) вытекает перестановочность операторов

$$\Theta[\mathrm{Re}]=\mathrm{Re}[\Theta] \tag{21}$$

и, как следствие, эквивалентность задач Шварца (15) и (19).

Общим итогом параграфа является правило:

Чтобы решить задачу Д $u^+(\xi)=f(\xi)$, $\xi\in\partial T$ в случае звездной области T для уравнения (1), надо обратить интегральный оператор Вольтерра Θ (19) и, решив задачу Шварца (20) для голоморфной функции $\varphi(z)$ в T при дополнительном условии $\varphi(z_0)=\overline{\varphi(z_0)}$ $(z_0\in T)$, подставить найденное значение (или значения) в формулы (11)-(13).

В §4 схематично изложен пример, иллюстрирующий решение задачи Д для уравнения Гельмгольца

$$\Delta u+\lambda^2 u=0\ ,\lambda=\bar{\lambda}, \tag{22}$$

в случае единичного круга $T:|z|<1$. Здесь ∂T не имеет особых точек и граничное условие задано в каждой точке $t\in\partial T$:

$$u^+(t)=f(t),\ t=e^{i\theta}\in\partial T, 0\le\theta\le 2\pi. \tag{23}$$

Продолжением уравнения (22) на комплексные переменные z, ζ является

$$\frac{\partial^2 U(z,\zeta)}{\partial z\partial\zeta}+\frac{\lambda^2}{4}U(z,\zeta)=0, \tag{24}$$

а основной областью Ω – вся комплексная плоскость z. Каждому C– аналитическому решению $U_0(z,\zeta)$ в $(T\times\bar{T})$ уравнения (24) соответствует симметричное решение

$$U(z,\zeta)=\frac{1}{2}\left\{U_0(z,\zeta)+\overline{U_0(\bar{\zeta},\bar{z})}\right\}, \tag{25}$$

из которого при $\zeta=\bar{z}$ получается вещественное регулярное в T решение

$$u(x,y)=U(z,\bar{z})=\frac{1}{2}\left\{U_0(z,\bar{z})+\overline{U_0(z,\bar{z})}\right\}=\operatorname{Re}U_0(z,\bar{z}), \tag{26}$$

содержащее одну произвольную голоморфную в T функцию $\varphi(z)=\overline{\varphi(\bar{z})}$.

Уравнение (24) является самосопряженным и функция Римана для него известна:

$$G=G(t,\tau;z,\zeta)=\Im_0\left(\lambda\sqrt{(z-t)(\zeta-\tau)}\right),\ (t,z\in T,\tau,\zeta\in\bar{T}); \tag{27}$$

здесь $\Im_0(v)$ есть функция Бесселя первого рода нулевого порядка

$$\Im_0(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!k!}\left(\frac{v}{2}\right)^{2k},$$

являющаяся по v целой функцией.

Построить G (27) удобнее всего из интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода, предложенного в монографии И.Н. Векуа ([1], с.27). Через G (27) любое регулярное внутри круга $|z| < 1$ решение уравнения (22) записывается в виде

$$u(x, y) = \operatorname{Re} U_0(z, \bar{z}), \tag{28}$$

$$U_0(z,\zeta) = \Theta[\varphi(z)] =$$

$$= \varphi(z) - \int_0^z \varphi(t) \frac{\partial}{\partial t} \Im_0\left(\lambda\sqrt{\zeta(z-t)}\right) dt = \tag{29}$$

$$= \varphi(z) - \int_0^1 \varphi(z\,\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \Im_0\left(\lambda\sqrt{z\,\zeta(1-\eta)}\right) d\,\eta, \tag{30}$$

где должно быть $\varphi(0) = \overline{\varphi(0)}$. Если учесть, что из (26) при $z \to \xi \in \partial T$ и из (23) для $U_0(z,\zeta)$ получается краевое условие

$$\operatorname{Re} U_0(\xi, \bar{\xi}) = f(\xi),\ \xi \in \partial T, \tag{31}$$

которое с помощью (28)-(30) приводится к такому виду

$$\Theta[\operatorname{Re}\varphi(\xi)] = f(\xi) \tag{32}$$

или, что все равно, к виду

$$\operatorname{Re}\varphi(\xi) - \int_0^{\xi} \operatorname{Re}\varphi(t) \frac{\partial}{\partial t} \Im_0\left(\lambda\sqrt{1 - t\bar{\xi}}\right) dt = f(\xi). \tag{33}$$

Это уравнение Вольтерра однозначно обратимо, но при получении формулы обращения

$$\operatorname{Re}\varphi(\xi) = \Theta^{-1}[f(\xi)],$$

резольвенту уравнение (33) прямым вычислением интегрированных ядер лучше не строить, слишком громоздкий счет; лучше учесть, что это уравнение (33), записанное в виде

$$\operatorname{Re}\varphi(\xi) - \int_0^1 \operatorname{Re}\varphi(\xi\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \Im_0\left(\lambda\sqrt{1-\eta}\right) d\eta = f(\xi),$$

становится частным случаем интегрального уравнения (12*.9) из [1], с.69, формула которого получена И.Н. Векуа еще в 1945 году в работе [18] из списка литературы монографии [1].

В §5 изложено решение задачи Д еще для одного эллиптического уравнения

$$\Delta u + \frac{4n(n+1)}{(1+x^2+y^2)^2}u = 0, \ n \subset N \tag{34}$$

часто встречающегося в математической физике. В комплексных переменных оно записывается так

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \zeta} + \frac{n(n+1)}{(1+z\zeta)^2}U = 0, \tag{35}$$

и, значит, за основную область Ω можно взять любую односвязную область на $\overline{C}$, в которой $1 + z\zeta \neq 0$, например, круг $T: |z| < 1$.

Так как для уравнения (35) $A(z,\zeta) = B(z,\zeta) \equiv 0$, то интегральное уравнение Вольтерра для функции Римана $V(z,\zeta) = G(t,\tau;z,\zeta)$ имеет достаточно простой вид

$$V(z,\zeta) + \int_t^z d\xi \int_\tau^\zeta C(\xi,\eta)V(\xi,\eta)d\eta = 1, \tag{36}$$

однако в монографии [1] (с.28) имеется указание, что при решении уравнения (36) лучше функцию $V(z,\zeta)$ строить как решение уравнения (35), учитывая его самосопряженность и приведя его путем замены переменных (указана в [1] на с.29) к известному ДУ Эйлера.

В диссертации это указание использовано лишь частично: $G(t,\tau;z,\zeta) = U(z,\zeta)$ отыскивается как решение ДУ (35) но к уравнению Эйлера не приводится. Просто учитывается, что коэффициенты ДУ (35) зависят от произведения $X = z\zeta$ и потому частные решения уравнения (35) отыскиваются зависящими от этого же произведения $X = z\zeta$. Одним из таких частных решений оказалось

$$U_o(z,\zeta) = P_n\left(\frac{1 - z\zeta}{1 + z\zeta}\right), \tag{37}$$

где $P_n(Z)$ есть полином Лежандра

$$P_n(Z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dZ^n}(Z^2 - 1)^n, \quad n = 0,1,... \tag{38}$$

и непосредственной проверкой показывается, что наряду с решением (37) частными решениями уравнения (35) будут и все функции

$$U(z,\zeta) = U_o(z_1,\zeta_1) = P_n\left(\frac{1 - z_1\zeta_1}{1 + z_1\zeta_1}\right), \tag{39}$$

если z_1 и ζ_1 есть дробно-линейные функции от z и ζ, соответственно,

$$z_1 = \mu\frac{z - t}{1 + \tau z}, \quad \zeta_1 = \frac{1}{\mu}\,\frac{\zeta - \tau}{1 + t\zeta}, \tag{40}$$

каждая из которых зависит от трех произвольных комплексных параметров t, τ, $\mu \neq 0$. Если взять (40) при $t \in \Omega$, $\tau \in \overline{\Omega}$, и подставить в (39), то получится решение

$$U = G(t,\tau;z,\zeta) = G(z,\zeta;t,\tau) = P_n\left(\frac{(1 - z\zeta)(1 - t\tau) + 2z\tau + 2\zeta t}{(1 + z\zeta)(1 + t\tau)}\right) \tag{41}$$

уравнения (35) по каждой паре переменных C– аналитическое в $(\Omega \times \overline{\Omega})$. Это и есть функция Римана уравнения (35).

Задача Д для уравнения (34), эквивалентная задаче Шварца

$$\begin{aligned} U(t_o,\bar{t}_o) = \alpha + \frac{1}{2^n n!}\Bigg\{\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\varphi^{(k)}(0)}{\bar{t}_o^{-k}}\left[\frac{d^{n-k}}{d\xi^{n-k}}(\xi^2 - 1)^n\right] - \\ -(-1)^n\int_0^1(\xi^2 - 1)^n\frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}}\varphi(\xi t_o)d\xi\Bigg\}. \end{aligned} \tag{46}$$

Добиться выполнения тождества $U(t_o,\bar{t}_o) \equiv 0$ на ∂T можно подбором в формуле (46) функции $\varphi(z)$ Легко проверяется, что одним из значений $\varphi(z)$ будет $\varphi(z) = z$.

В §7 речь идет об условиях равносильности общей граничной задаче А для эллиптического уравнения (1) в случае области Т с ляпуновской границей и такой же задачей А для гармонических функций. Задача А для уравнения (1) впервые была сформулирована и наиболее полно исследована И.Н. Векуа ([1],гл. 3). Вот формулировка этой задачи.

Пусть n – некоторое натуральное число или нуль и пусть

$$u_{ik} = \frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i \partial y^k}, \quad i, k = 0, 1, \dots . \tag{47}$$

Требуется найти регулярное в области $T \subset \Omega$ решение (1), удовлетворяющее граничному условию

$$S(u) = f(t), \; t \in \partial T, \tag{48}$$

$$S(u) = \sum_{i,k=0,1,\dots,n}^{i+k \le n} \left[\alpha^{ik}(t) u_{ik}^{+}(t) + \int_{\partial T} \beta^{ik}(t,\tau) u_{ik}^{+}(\tau)\, d\sigma \right],$$

где $d\sigma$ – элемент дуги в точке $\tau \in \partial T$; $\alpha^{ik}(t)$, $f(t)$ – заданные действительные функции точки t, непрерывные по Гёльдеру на ∂T; $\beta^{ik}(t,\tau)$ – заданные действительные функции вида

$$\beta^{ik}(t,\tau) = \frac{\beta_{o}^{ik}(t,\tau)}{|t-\tau|^{\alpha}}, \qquad 0 \le \alpha \le 1, \tag{49}$$

где функции $\beta_{o}^{ik}(t,\tau)$ непрерывны по Гёльдеру по t, τ.

И.Н. Векуа решал эту задачу, как и ее частный случай задачу Д, на основе своего интегрального представления любого регулярного решения уравнения (1); входящую в него неизвестную голоморфную в Т функцию он отыскивал в виде интеграла типа Коши с часто мнимой плотностью, для определения которой из заданного краевого условия (48) получалось сингулярное интегральное уравнение.

З.М. Нут эту же задачу переносил на риманову поверхность $\mathfrak{R}_z$ алгебраической границы ∂T и полученную на $\mathfrak{R}_z$ граничную задачу А для аналитических на $\mathfrak{R}_z$ функций предлагал исследовать по схеме И.Н. Векуа.

Здесь в диссертации, для задачи А с краевым условием (48) обсуждается только один вопрос: может ли эта задача А для эллиптического уравнения (1) быть равносильной задаче А для гармонических функций? Доказано, что в случае звездных областей Т и коммутативности операторов Θ и S равносильность имеет место.

Заключение

В диссертации получены и выносятся на защиту следующие основные результаты:

1. Выделение среди областей с алгебраическими границами класса односвязных звездных областей, для которых задача Д для эллиптических уравнений (1) и для гармонических функций равносильны.
2. разработка схемы решения задачи Д методом симметрии.
3. Условия равносильности задач А для эллиптического уравнения (1) и для гармонических функций.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Любови Ивановне Чибриковой за постановку задач и всестороннюю помощь при выполнении настоящей работы.

По результатам диссертации оформлены и сданы на депонирование следующие работы:

1. Чибрикова Л.И., Казза А.М. Об одном конструктивном методе решения линейных граничных задач для вещественных эллиптических уравнений в случае плоских областей. Казань, 1999 /Казан. ун-т – 39с. – Деп. в ВИНИТИ.
2. Казза. А.М. Дополнение к решению задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в случае круга. Казань, 1999 /Казан. ун-т – 10с. – Деп. в ВИНИТИ.

2-00

Издательство **«Экоцентр»**
Лицензия Минпечати РТ № 138 от 3.05.99.
Без объявления – 2000.

Отпечатано с готового оригинал-макета. Печать RISO.
Бумага офсет №1. Формат 60*84 1/16.
Объем 1.0 п.л. Тираж 100 экз. Заказ 1.

Отпечатано на полиграфическом участке издательства «Экоцентр»,
г. Казань, ул. Кремлевская, 18